NUMERI COMPLESSI

1. Calcolare le seguenti potenze di i:

   $a)\ i^2 \quad , \quad b)\ i^3 \quad , \quad c)\ i^4 \quad , \quad d)\ \frac{1}{i} \quad , \quad e)\ i^{34} \quad , \quad f)\ i^{-7}$

2. Semplificare le seguenti espressioni:

   $a)\ (\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}\, i) \quad , \quad b)\ (3+i)(3-i)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\, i\right) \quad ,$

   $c)\ \frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} \quad , \quad d)\ \overline{\overline{z} + 3i}$

3. Verificare che $z = 1 \pm i$ soddisfa l'equazione $z^2 - 2z + 2 = 0$.

4. Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi :

   $a)\ 1 + i - \frac{i}{1-2i} \quad , \quad b)\ (1+i)(1-i)(1+\sqrt{3}\, i) \quad , \quad c)\ \left(\frac{1+i}{1-i} - 1\right)^2$

5. Mettere in forma algebrica ed in forma polare i seguenti numeri complessi:

   $a)\ z = i \quad , \quad b)\ z = 1 + i \quad , \quad c)\ z = \frac{1}{3+3i} \quad ,$

   $d)\ z = \frac{4i}{\sqrt{3} + i} \quad , \quad e)\ z = (1+i)(2-2i)$

   f) $z = \frac{2}{\sqrt{3} - i} + \frac{1}{i} \quad ,$ g) $z = \frac{1+i}{2-2i}$

7. Trovare le radici dei seguenti numeri complessi e disegnarle sul piano di Gauss.

   $a)\ \sqrt[4]{\sqrt{2}} \quad , \quad b)\ \sqrt{1 - \sqrt{3}\, i} \quad , \quad c)\ \sqrt[3]{1 - i + \sqrt{2i}}$

8. Risolvere e rappresentare sul piano di Gauss le soluzioni delle seguenti equazioni:

   $a)\ z^2 + 3iz + 4 = 0 \quad , \quad b)\ z^4 + 2z^2 + 4 = 0 \quad ,$

   $c)\ z|z| - 2z + i = 0 \quad , \quad d)\ z\overline{z} - z + \frac{i}{4} = 0 \quad ,$

   $e)\ z^3 = |z|^2$

9. Risolvere e rappresentare sul piano di Gauss le soluzioni dei seguenti sistemi:

   $(a)\ \begin{cases} \mathrm{Re}\ [\overline{z}(z+i)] \leq 2 \\ \mathrm{Im}\ z \geq 0 \end{cases}$

   $(b)\ \begin{cases} z^6 + 7z^3 - 8 = 0 \\ \mathrm{Re}(z) = 1 \end{cases}$

10. E' data la funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ così definita $f(z) = \dfrac{1+iz}{iz+i}$.

    a) Trovare tutti gli $z \in \mathbf{C}$ per cui $f(z) = z$.

    b) Trovare le controimmagini di $3+i$.

11. Sapendo che $1+i$ è radice del polinomio $p(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$, trovare le altre radici. Decomporre $p(z)$ in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$ e su $\mathbf{C}$.

12. Verificare che il polinomio :

    $p(z) = z^3 + (1+2i)z^2 + [(-\sqrt{3}+2)i - 2]z - i\sqrt{3} - 2$

    si annulla per $z_0 = -1$ e trovare le altre radici.

    Decomporre $p(z)$ in fattori irriducibili .

13. Trovare un polinomio $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ di grado 5, avente $a = 3$ come radice semplice, $b = 2 - 3i$ come radice di molteplicità 2, e tale che $p(0) = 1$.